

多风险资产的投资组合选择 与异质性资产定价研究*

赵志君 刘美欣 张晓奇

摘要:经典资产定价理论建立在投资者同质、完全理性、市场不存在交易成本、资本完全流动和无套利均衡会自发实现等假设的基础上,重点揭示了不同资产价格或收益率之间的关系,但忽视了财富约束、交易量和交易过程的作用。这些严重偏离现实的设定,导致经典资产定价理论的解释力严重不足。为发展解释力更强的模型,本文假设面临流动性约束和交易限制的投资者具有异质信念、有限理性,市场价格按撮合交易方式而非瓦尔拉斯均衡机制进行出清和调整,针对多风险资产市场构建了一个反映异质投资者群体交互作用的资产定价模型,得到了风险资产价格演化方程。在理论分析的基础上,本文构造出了收益率预测模型和投资组合选择模型,并在收益率预测精度与最优资产组合的盈利能力上与经典模型进行了对比,结果表明本文的模型具有更好的实战表现。在收益率预测精确度上,本文模型与经典的时间序列自回归模型相当,但比后者能够更加精准地识别收益率分布尾端的极值风险。而在组合盈利能力上,基于本文模型构造的 HAM 组合的日均收益率和考虑了风险折价后的夏普指数都显著优于其他经典组合。如果进一步拉长持有期,本文 HAM 组合在 30~250 个交易日的持有期下的累计收益率年化值随持有期限的延长而增加,波动率随持有期的延长而降低,并且综合表现显著优于相同持有期限下的其他备选组合,因此更加适用于持有期限较长的机构投资者。

关键词:投资组合 资产定价 异质性投资者模型

一、引言

Markowitz(1952)开启了资产组合和资产定价理论研究的量化时代。根据 Markowitz 的投资组合理论,投资组合选择依赖各类资产的收益率和收益率协方差矩阵(Chan et al,1999; Guerard et al,2020;Marquering & Verbeek,2004)。大量实证研究表明,精确的协方差矩阵估计可通过简单的统计方法得到(Merton,1980; Nelson,1992; Chan et al,1999),但要得到收益率的精确估计却非常困难。因此,资产收益率的精确估计事关资本资产定价理论的解释力,也影响该理论在实践中的应用。

基于不同的模型,学者们提出了许多不同的收益率预测方案,其中最经典的方案建立在资本资产定价模型(CAPM)的基础上。根据资本资产定价模型,在信息完备、流动性充裕、不存在买空卖空限制、投资者同质的资本市场上,单个风险资产的理论收益率等于无风险利率与平均风险溢价之和,该风险资产的实际收益率对这一理论收益率的任何偏离都意味着套利机会的出现,但这种套利机会

* 赵志君,中国社会科学院大学经济学院、中国社会科学院经济研究所,邮政编码:100836,电子邮箱:zhaozj@cass.org.cn;刘美欣,中国社会科学院大学经济学院,邮政编码:102488,电子邮箱:lmmmx555@163.com;张晓奇,中国社会科学院经济研究所、东南大学国家发展与政策研究院,邮政编码:100836,电子邮箱:xiaoqizh@buffalo.edu。基金项目:国家重点研发计划项目“金融风险的计量理论和方法”(2018YFA0703900)。感谢匿名审稿人的修改建议,文责自负。

将因套利行为而瞬间消失。因此,风险资产的实际收益率不可能长期偏离理论收益率。

根据资本资产定价模型,风险资产收益率相对于无风险资产利率的溢价,是对投资者承担市场风险的补偿,溢价程度由反映个体资产收益率与市场组合收益率相关程度的 β 值决定(Sharpe,1964; Lintner,1975,1965; Mossin,1966)。然而,实证研究表明,存在不能完全被市场风险溢价所解释的超额收益率(Siegel & Thaler,1997; Lewellen & Nagel,2006)。Fama(1970)将这一现象归咎于信息完备性的理论假设背离了信息不完备性的现实,在现实中,总有一部分投资者可以凭借其他投资者不具备的“私人信息”进行套利,其他投资者无法实施同样的套利行为,从而使得超额收益率长期存在。要想精准预测风险资产的收益率,就需要在资本资产定价模型中引进一些反映非公共信息的信息因子,构造多因子资产定价模型(MacKinlay,1995)。

还有一种观点将超额收益率归因于投资者之间的异质性和不完全理性。假设不同投资者对各类风险资产收益率存在不同的主观先验认知,利用这些主观先验认知和贝叶斯更新规则,投资者可以计算后验的收益率和波动率的预期值,按照这一思路构造最优投资组合便产生了BL模型(Black & Litterman,1990,1992)。BL模型将非标准化的“场外”信息与标准化的财务和收益率的历史数据结合起来,是预测收益率的强有力工具,它展现了先验认知的异质性对于风险资产收益率的影响。BL模型的不足之处是它没有对投资者行为异质性的影响展开深入考察,相比之下,异质性投资者模型(HAM)对投资者的收益率异质预期与投资行为差异的相互作用机制进行了恰当的刻画(Homes,2006; Dieci & He,2018)。

假设收益率的预测值与可观测的收益率存在线性关系是资本资产定价模型、多因子模型和BL模型的一个共同特点。与之不同的是,异质性投资者模型(HAM)中的预期收益率与当前收益率观测值的关系通常是非线性的,异质性投资者模型的这一性质使它能捕捉到超额收益、超额波动、波动聚集等“金融异象”(Ellen & Verschoor,2018; Lux & Zwinkels,2018)。

尽管异质性投资者模型能较好地捕捉到“金融异象”,但它们在投资组合选择理论的应用上却存在很大局限性。原因之一是,异质性投资者模型通常将投资者划分为两到三个不同类型(如价值投资者、顺趋势投资者、反趋势投资者等),但在应用中应该将投资者划分成几类、应该按照什么样的标准划分,在很大程度上依赖于研究者的主观判断,具有很大的随意性,这种随意性会对模型的解释力产生直接影响。另一个原因是,现有的异质性投资者模型大多局限于讨论无风险资产和单一风险资产的投资组合问题,对多种风险资产问题的忽视限制了异质性资产定价理论的应用。

为克服异质性投资者模型的上述局限性,本文借鉴 Zhao & Zhang(2022)的建模方法,用连续空间上的分布函数刻画异质性投资者群体的结构,尽可能地消除在投资者类别和行为模式设定上的主观随意性。与此同时,本文在CRRRA效用函数框架下拓展 Zhao & Zhang(2022)的单一风险资产定价模型,试图解决 n 种风险资产的投资组合选择和收益率预测问题。在市场稳态出清的情形下,本文模型的最优投资组合等于Markowitz的最优组合,预期收益率等于资本资产定价模型的理论收益率,因此,本文模型是Markowitz投资组合理论的一种自然拓展。同时,由于本文模型中反映市场异质性程度的协方差矩阵可以视同BL模型的有限类别的异质主观收益率的条件协方差矩阵,本文模型也可以看作是BL模型的拓展。另外,考虑到在现实世界市场中流动性总是受限的,风险资产的实际收益率总会受到资产供给、需求以及投资者财富水平的影响,本文认为非均衡撮合定价机制(Chiarella & He,2003; LeBaron,2006)可以体现供求关系、交易过程和财富分布对资产价格的影响。实证分析表明,本文模型在收益率预测精度上的表现显著优于经典模型,它在投资组合的样本外盈利表现上也显著优于经验性的“拇指法则”。

二、文献综述

(一)Markowitz投资组合理论、资本资产定价与因子模型

Markowitz(1952)用风险资产收益率的期望值和方差(协方差矩阵)刻画风险资产的收益和风

险,按照给定收益条件下的风险最小化或给定风险条件下的收益最大化或期望效用最大化原则,确定最优投资组合,开启了现代资产组合理论研究的量化时代。在 Markowitz 投资组合理论的基础上,Sharpe(1964)、Lintner(1975,1965)和 Mossin(1966)相继提出了资本资产定价模型(CAPM)的不同版本。CAPM 假设市场中存在一个代表性理性投资者,投资者可以随意买空卖空且买空卖空不受流动性的限制,每种风险资产收益率的期望值可以表示为市场组合的收益率期望值乘以反映市场组合和该风险资产收益率相关程度的 β 系数。投资者可以根据 CAPM 预测单个风险资产收益率,根据 Markowitz 投资组合理论构造最优投资组合。

然而,实证研究(Fama & French,1996;Markowitz et al,2021)表明,基于 CAPM 的预测收益率与实际收益率之间存在一个无法用资本资产定价理论解释的较大偏差(Jegadeesh & Titman,1993;Siegel & Thaler,1997;Lewellen & Nagel,2006)。为合理地解释这部分偏差,Ross(1976)根据无套利定价原理,创建了多因子套利资产定价模型。从理论上讲,多因子定价模型可以提高风险资产收益率的预测精度;从实践上看,三因子模型(Fama & French,1993)和五因子模型(Fama & French,2015)比单因子 CAPM 模型表现出更好的预测能力(Fama & French,1996)。但在实际应用中风险因子的选取依赖于投资者的先验知识(MacKinlay,1995;Maiti,2020),导致在多因子模型的设定上存在较大的主观随意性(Maiti,2020),而使模型未必能正确地定价市场风险,收益率预测可能因其对市场环境和数据样本的高度依赖而不具有稳健性。

针对多因子模型在因子选择上的主观随意性,近期的研究倾向于利用数据驱动的统计方法(Uddin & Yu,2020)、机器学习和深度学习(Gu et al,2020)去识别潜在的风险因子,在此基础上开发的隐含因子模型(latent factor model)获得了较好的收益率预测(李斌等,2019;Leippold et al,2021)。需要看到,近年来大量涌现的降维、变量选择、分类算法、深度学习等 AI 技术引入因子模型和资产定价的研究,其主要目的在于对风险资产价格进行短期的预测,从而支撑投资组合的构建决策,然而,这类模型对收益率的波动聚集、长程自相关等金融异象不能给出令人满意的解释(MacKinlay,1995)。

(二)Black-Litterman 模型与基于主观信念的收益预测

根据资本资产定价模型和多因子模型,个体资产收益率完全取决于市场组合和各个非市场因子组合的收益率。因此,给定各组合中的风险资产权重信息,单个风险资产的收益率期望值将由资本资产定价模型完全确定,任何通过其他方式得到的收益率预测必将引起不同程度的误差偏离,而由这些预测决定的最优投资组合也将偏离 Markowitz 的有效投资组合前沿,从而引致更低的实际收益或更高的风险成本(Sharpe,1964;Lintner,1965;Fama,1970)。这也意味着,所有基于风险资产收益率历史数据和专家经验的收益率预测和投资组合构建方法都是无效的,也是没有意义的(Mossin,1966)。然而,在真实市场中投资者的异质性和有限理性是显而易见的事实,因而做出偏离资本资产定价模型和因子模型的收益预测和有效投资组合前沿的组合决策是难以避免的,在存在流动性约束的前提下,这种决策必然反作用于风险资产的实际收益率,使其偏离资本资产定价模型和因子模型的预言(Fama,1970)。这意味着,基于历史数据和专家判断的收益率预测是有意义的,并带来了切实的后续反应,而且这种预测可能因捕捉到真实市场中的投资者行为而具有较高的精度(Black & Litterman,1990)。因此,一个好的收益率预测模型应当在资本资产定价模型的基础上,反映收益率的历史变化和专家的经验知识,著名的 Black-Litterman 模型(简称 BL 模型)(Black & Litterman,1990,1992)正好体现了这一思想。

BL 模型以贝叶斯概率更新理论为方法论基础,假设投资者会形成一个先验的预期收益率分布和一系列关于未来收益率变化的主观判断,而这些主观判断服从一个由先验收益率预期值和其他模型参数决定的正态分布。在给定具体的主观判断变量的取值下,根据贝叶斯后验概率公式可推导出投资者收益率预期的后验概率分布,而由该分布决定的后验收益率期望值被视为经由主观判断修正的收益率预测值。大量实证研究表明,相较于传统情况,融入主观判断信息后,风险资产收益率的预

测精度和最优投资组合的收益都得到了提高(Bessler et al,2017)。

通过定义不同的主观判断变量及参数,可以得到完全不同的后验收益率预期,这大大增加了BL模型的灵活性和应用上的便捷性,但这也使其遭受了存在主观变量选择随意性的批判(Cheung,2010)。针对这一局限,近期文献开始采用深度学习技术等数据驱动方法识别合适的主观判断变量及参数,这在很大程度上可以避免变量选择的随意性问题(Beach & Orlov,2007; Min et al,2021; Idzorek,2007; Lin et al,2021)。

最后,BL模型可被视为一类特殊的异质性投资者模型(Hommes,2006)。然而,与BL模型采用收益率预测的贝叶斯更新规则不同,常用的异质性投资者模型(Hommes,2006; LeBaron,2006)更加关注异质信念对于市场供求关系的影响,以及市场供求的相对变化对风险资产价格和收益率变化趋势的影响。换言之,异质性投资者模型更加关注市场过程,将风险资产价格的变化视为市场自发演化的结果。在这一点上,异质信念投资者模型弥补了传统资本资产定价模型和BL模型只关注价格变量、忽视市场供求缺口作用的缺陷。

(三)异质信念投资者模型与投资组合

近年来,随着对“金融异象”认识的深入,经典资本资产定价理论因存在许多不切实际的设定而受到广泛批判,在异质性、有限理性和非均衡定价等替代假设的基础上构建异质性投资者模型已经成为现代资产定价理论研究的热点领域(LeBaron,2006; Hommes,2006; Dieci & He,2018)。在风险偏好和禀赋相同、收益率预期不同等假设下的异质性投资者模型受到的关注似乎最多(Brock & Hommes,1998; Chiarella & He,2008; He et al,2018)。尽管异质性投资者模型的核心特点在于不同投资者不同预期形成机制的设定,但一定程度上投资者的不同情绪、风险规避水平等因素也可以表现为预期形成方式上的差异,从而被纳入分析框架(Chiarella et al,2006; He & Shi,2012)。目前,沿着异质性预期的方向已经开发出的异质投资者模型包括:采用技术分析和基本价值分析的两类投资者模型(Chiarella,1992),带有模仿行为的模型(Kirman,1993),异质信念适应性模型(Brock & Hommes,1997,1998; Chiarella & He,2001)等。

国内学者也就异质预期模型及其实证分析开展了大量研究。例如,周爱民和遥远(2019)的研究表明,高风险高收益的传统认知存在误区,异质信念、投资者情绪、换手率和经济增长这四个变量对市场风格的转换起到一定的预测作用。张维和赵帅特(2010)、张维和张永杰(2006)为构建异质信念模型提供了一些具有启发性的思路。郝军章等(2020)根据 Brock & Hommes(1998)用异质性投资者模型发现,投资者数目不是导致中国股票市场波动的显著因素。

需要强调的是,在引入异质信念后,一个自然的问题是市场应如何协调不同投资者的差异化需求、市场价格如何决定以及市场出清如何实现?针对这一问题的不同处理方式,形成了两支文献。其中一支是以 Yan(2008)、Kogan et al(2017)、Borovicka(2020)为代表的文献,除假设投资者具有不同的价格预期形成机制外,他们完全沿用了投资者完全理性、长期存活和瓦尔拉斯均衡等古典假设。这支文献的基本结论与传统的资产定价模型一致,即股票的市场价格完全由红利水平决定。Yan(2008)和 Borovicka(2020)基于完全理性的异质性投资者模型的分析表明,在其他因素相同的前提下,对实际红利过程预测越精准的投资者越可能在市场中长期幸存下来。在这个意义上,此类模型为有效市场假说和传统资产定价理论提供了一种基于异质性投资者的“补丁”,即纵然存在偏离市场真实走势的异质性预期,长期来看这样的异质预期总会被更加接近真实市场行情的“正确”预期所打败,从而市场会向着有效市场假说所描述的状态收敛。但需要强调,这类文献对于投资者完全理性的假设并不符合现实市场中仅具有有限理性的投资者的基本事实,也不能对股票市场中的超额波动现象提供合理的解释。

以 Brock & Hommes(1998)为代表的另一支文献从投资者具有有限理性和市场并不一定总能出清的基本假设出发,刻画投资者的异质预期及市场演化。在这支文献中,一个普遍的共识是差异化的预期形成机制代表投资者理性程度的不同,因此,异质性投资者模型并不排斥仅依据经验规则

来形成预期的有限理性行为。在此基础上,差异化的预期形成机制会导致差异化的价格预期、进而诱发差异化的资产需求,这会导致多空缺口和市场的非出清。事实上,现实金融市场的价格和收益率等相关信息是实时更新的,投资者会根据当前发布的实时信息形成价格预期,不同投资者的价格预期及其引致的多空缺口也会实时更新。在这种情况下,市场不是按照瓦尔拉斯均衡价格出清,而是以非均衡撮合定价的形式实现出清(Brock & Hommes,1998; Dieci & He,2018; He et al,2018; Chiarella & He,2001, 2008),其中价格的变动与多空缺口一致。这种非均衡调价机制与投资者的异质性预期相结合的系统,可以在无外生冲击的情况下内生出持续的价格波动,为股票收益率的超额波动提供了一种自洽的理论解释(He et al,2018)。借助于随机冲击,Chiarella et al(2006)的两类异质投资者组成的股票市场模型再现了价格轨迹在高低两个稳态价格附近的间歇性聚集现象。股票收益的长程自相关(He & Li,2008; He & Li,2014)、价格泡沫(He & Zheng,2016)等也在其他异质投资者模型中得到再现。

尽管异质信念投资者模型对“金融异象”表现出较强的解释力,但也饱受诟病。首先,前述异质信念投资者模型一般都按事先预设投资者预期形成机制,将投资者分为有限个固定类别,这导致分类方式的主观性过强,其对金融异象的解释力受模型设计的影响较大(Dieci & He,2018)。针对这一问题,Zhao & Zhang (2022)按投资者的财富水平和价格预期对投资者进行连续型分类,投资者总体的市场结构用连续型分布函数表示,使异质信念投资者种类和占比减少了主观随意性。其次,目前关注度最高的异质信念投资者模型,如经典 Brock & Hommes(1998),通常只包含一种风险资产,研究的主要目的是为“金融异象”提供理论解释。这种简化的单风险资产模型限制了其在投资实践中的应用。而对于少数专注于多资产场景下的异质信念投资者模型,如 Dieci & Westerhoff (2013, 2016)及 Chiarella et al(2013),侧重研究股票市场与其他市场(如外汇市场、房地产市场等)之间的互动与风险传导机制,很少关注投资组合的选择。因此,将多风险资产下异质信念投资者模型进行拓展并运用至投资组合领域是有理论和现实意义的。

三、模型、估计与投资组合构造

借鉴 Zhao & Zhang (2022)的异质信念投资者模型分析框架,假设市场上存在 n 种不同的风险资产和一种无风险资产,每一期不同的投资者具有不同的财富禀赋,对风险资产未来的收益率存在不同的预期。需要强调,在后文中为简化表述和避免歧义,本文将统一使用“收益率”一词指代由风险资产与无风险资产的收益之差所决定的风险溢价。一般来说,风险资产的未来收益率对个体投资者而言是一个随机变量,它的分布是个体投资者的主观概率分布,该分布属于该投资者的私人信息,其他人未必知道。针对这个分布求期望和方差(协方差),可以得到个体投资者的收益率预期和协方差矩阵,而这个预期值和协方差矩阵在本文中分别用 n 维向量 y_i 和矩阵 Σ_i 表示。在不同投资者具有一致的收益率协方差估计(Σ_i)情况下,从投资者收益率预期异质性的角度讲,投资者的不同类型是由预期值的不同来定义的,个体投资者对于未来收益率的预期值 y_i 在全体投资者群体内的分布 F_{y_i} 代表了投资者群体的结构。需要强调,个体投资者的主观分布和主观收益率预期反映的是特定的个体对未来收益率变动可能性的主观认知,它是由个体所掌握的私有信息和个体特有的知识背景等因素决定的。相反,个体投资者收益率预期在群体中的分布反映的是市场中持有不同预期的投资者的相对占比,它是由个体投资者彼此之间的差异化程度所决定的。在这个意义上,个体投资者收益率预期在群体中的分布与个体关于未来收益率的主观分布是两种性质不同的分布。正是以上两个分布之间的差异为很多“金融异象”的产生提供了内生性解释(Zhao & Zhang,2022)。

以上对异质预期的处理方法避免了研究者在投资者分类上过度的主观随意性。在此基础上,参照 Chiarella & He(2001,2008)中的做法,本文在 CRRA 型效用函数下推导异质投资者的风险资产的供求函数。CRRA 型效用函数有助于在风险资产需求函数中引入不同投资者的异质财富水平的

影响,进而将市场财富存量作为重要影响因素纳入风险资产价格的决定过程,由此体现由财富引致的交易量上的约束对于资产价格波动的影响,揭示资产价格波动背后的财富效应。而在个体投资者具有连续化的异质预期的基础上,进一步引入连续化的异质财富有助于推导关于异质个体的异质财富演化的随机微分方程,从而为分析市场的财富分配效应提供理论基础。

为方便阅读,表1总结了后文模型中常用的数学符号及其含义:

表1 模型中的数学符号

符号	含义
r_t	t 时刻无风险资产利率
P_t	$n \times 1$ 维向量,表示 t 时刻风险资产价格
p_t	算式为 $\ln P_t$,表示 t 时刻风险资产价格的对数变换
d_t	$n \times 1$ 维向量,表示风险资产 t 时刻的瞬时红利回报率
dY_t	算式为 $d p_t + (d_t - r)dt$,表示 n 种风险资产在时刻 t 真实的瞬时的未来收益率,它等于资本增益 $d p_t$ 与红利回报率之和减去无风险利率,即风险资产与无风险资产收益率之差所表示的风险溢价
y_t	算式为 $\frac{E_t(dY_t)}{dt}$,表示个体投资者在 t 时刻对 n 种风险资产的瞬时收益率的预期,等于个体投资者关于未来收益率的主观分布的期望值
\sum_t	算式为 $\frac{E_t[(dY_t - y_t dt)(dY_t - y_t dt)^T]}{dt}$, $n \times n$ 维正定矩阵,表示由个体投资者在 t 时刻对 n 种风险资产未来收益率的主观分布的协方差矩阵
$F_{y,t}$	t 时刻投资者收益率预期 $y_t dt$ 在投资者群体中的分布函数
μ_t	$n \times 1$ 维向量, $\mu_t dt$ 表示分布 $F_{y,t}$ 的期望值,即个体收益率预期的群体均值
Θ_t	$n \times n$ 维正定矩阵, $\Theta_t dt$ 表示分布 $F_{y,t}$ 对应的协方差矩阵,即个体收益率预期在群体内分布的协方差
w_t	表示 t 时刻个体投资者的财富
$F_{w,t}$	t 时刻个体投资者财富 w_t 在投资者群体中的分布函数
C_t	$n \times 1$ 维向量,表示 t 时刻各类风险资产的存量供给

(一) 个体投资组合决策与市场需求

给定风险资产协方差矩阵在时刻 t 的估计值 \sum_t ,不失一般性,任一个体投资者可由其当前的收益率预期和财富水平所构成的二元组 (y_t, w_t) 来定义。投资者 (y_t, w_t) 在时刻 t 对于风险资产未来真实的收益率过程 $\{Y_{t+s}; s > 0\}$ 代表投资者的一个主观认知,其变化可用一个带漂移的布朗运动刻画,即 $\{Y_{t+s}^s; s > 0\}$ 满足:

$$dY_{t+s}^s = y_t ds + \sum_t^{\frac{1}{2}} dM_s^s \tag{1}$$

其中, M_s^s 代表标准的布朗运动,反映个体投资者 (y_t, w_t) 对风险资产收益率的随机变动主观判断。进一步假设,投资者对财富增长轨迹的主观认知 $\{w_{t+s}^s; s \geq 0\}$ 由如下的随机微分方程给出:

$$\frac{dw_{t+s}^s}{w_{t+s}^s} = (r_{t+s} + z_{t+s}^T y_t) ds + z_{t+s}^T \sum_t^{\frac{1}{2}} dM_s^s \tag{2}$$

其中, z_{t+s} 是一个 $n \times 1$ 维列向量,代表 $t+s$ 时刻各种风险资产持有比例;财富初值 $w_t^s = w_t$,即在初始时刻 t 投资者主观认知的财富值与其实际拥有的财富相等。

借鉴 LeBaron(2006)中的设定,假设给定投资者的单期效用函数为具有常相对风险规避系数(CRRA)的效用函数,即:

$$U(w) = \frac{w^\gamma}{\gamma} \tag{3}$$

则投资者的最优风险资产投资组合是以式(1)和式(2)为约束条件的最优化问题的解。该最优化问题的目标函数为式(4):

$$\max_{z_{t+}} E \int_0^{+\infty} \beta^{-s} U(w_{t+s}^S) ds \quad (4)$$

其中, β 代表贴现率。需要特别指出的是:根据 LeBaron(2006)和龚六堂(2002),如果在财富积累过程式(2)中扣除消费,同时在式(4)中用消费 c_{t+s}^S 代替 w_{t+s}^S ,则每期最优消费必定等于当期财富的一个固定比例,因此,在本文假设下投资者行为与经典的消费资产定价理论中的投资者行为保持一致。另外,考虑到引入消费后,消费率将成为一个额外的参数引入模型。除无风险利率基准的选取外,消费率并不影响其他参数和结论,但在实证研究中,这一额外参数需要有额外的数据来进行拟合,而对于参与股票市场的投资者而言,如何估算其消费率较为合理,文献中缺乏足够的支撑。因此,为了剔除加入消费后的额外复杂性,本文沿用 LeBaron(2006)的框架,仅考察式(4)中的简化情况。

对式(3)应用伊藤引理后,利用 Bellman 原理求解最大化问题式(4)可解得初始时刻 t 的最优投资组合向量:

$$z_t = \frac{1}{1-\gamma} \sum_t^{-1} y_t \quad (5)$$

由此可以求得个体投资者对各种风险资产的需求函数的列向量 $D(w_t, y_t) = \text{Diag}(P_t)^{-1} w_t z_t$, 其中 $\text{Diag}(v)$ 表示将向量 v 转化为将 v 作为对角线的对角矩阵的运算。由对角矩阵的特性,其逆矩阵 $\text{Diag}(v)^{-1}$ 等于对对角线向量 v 中每个元素逐一取乘法逆所得到的对角矩阵。

给定个体投资者的收益率预期和财富水平在群体中的分布,在个体投资者当前财富水平独立于收益率预期的前提下,投资者在初始时刻 t 对风险资产的总需求为:

$$\begin{aligned} D_t &= \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{w_t}{(1-\gamma)} \text{Diag}(P_t)^{-1} \sum_t^{-1} y_t dF_{y,t}(y_t) dF_{w,t}(w_t) \\ &= \frac{W_t}{1-\gamma} \text{Diag}(P_t)^{-1} \sum_t^{-1} \mu_t \end{aligned} \quad (6)$$

其中, W_t 代表 t 时刻个体投资者财富 w_t 在投资者群体中的分布 $F_{w,t}$ 的期望值。

(二)撮合定价、收益率演化与资本资产定价模型的拓展

给定 t 时刻各类风险资产的存量供给 C_t , 按照文献 Zhao & Zhang(2022)、Chiarella & He(2003)中的非均衡撮合定价机制,风险资产价格的更新方程为:

$$dp_t = \alpha(D_t - C_t)dt = \text{Diag}(P_t)^{-1} \alpha \left(\frac{W_t}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \mu_t - P_t C_t \right) dt \quad (7)$$

即风险资产的资本增益(价格变化率)为其当前供求缺口的一个比例 $\alpha > 0$ 。由于 t 时刻各类风险资产的(实际)收益率可以表示为其资本增益与红利回报率之和减去无风险利率,因此,在给定资本增益式(7)后,风险资产在 t 时刻实际的瞬时收益率 dY_t 可表示为:

$$\begin{aligned} dY_t &= dp_t + (d_t - r_t)dt \\ &= \alpha \text{Diag}(P_t)^{-1} \left(\frac{W_t}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \mu_t - P_t C_t \right) dt + (d_t - r_t)dt \end{aligned} \quad (8)$$

其中, d_t 表示风险资产的瞬时红利回报率向量, r_t 表示无风险资产利率。

(三)正态群体分布下的财富与收益率的联合演化

进一步假设个体投资者收益率预期在群体中的分布函数 $F_{y,t}$ 为一个多元正态分布,在每一时刻 t , $y_t - \mu_t$ 服从正态分布 $N(0, \Theta, dt)$ 。进而当 $dt \rightarrow 0^+$ 时,对于小区间内的 $s \in (t, t+dt)$, 个体投资者的财富在群体内的分布可由如下带漂移的几何布朗运动所决定的概率分布近似表达:

$$dw_{t+s} = w_{t+s} \left(r_t + z_{t+s}^T \frac{dY_{t+s}}{dt} \right)$$

$$= w_{t+s} \left(r_t + \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{dY_{t+s}}{dt} \right)^T \sum_t^{-1} \mu_t \right) ds + w_{t+s} \frac{1}{1-\gamma} \left(\frac{dY_{t+s}}{dt} \right)^T \sum_t^{-1} (y_t - \mu_t) \quad (9)$$

式(9)中个体认知的财富变化是两种力量共同驱动的。其一是由个体投资者主观认知下的收益率的主观预期和方差 $\left(\frac{dY_{t+s}}{dt}, \sum_t\right)$ 决定的,它们与投资者个人的历史经验有关。其二是由个体投资者收益率预期 y_t 在群体中的分布 $F_{y,t}$ 决定的,参数 (μ_t, Θ_t) 体现了投资者群体结构和个体之间的相互作用。这两种力量截然不同且相互独立。协方差矩阵 Θ_t 是投资者异质性的根本体现, \sum_t 是个体投资者对收益率不确定性的主观认知。

利用式(9),投资者群体中全部个体投资者的财富的演化轨迹可以看作是服从一个带漂移的几何布朗运动,而投资者群体的总财富则等于该几何布朗运动的期望值,利用几何布朗运动的性质可知,投资者群体的总财富的更新方程为:

$$\begin{aligned} \frac{dW_t}{dt} &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} w_t \left(r_t + \frac{y_t^T}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} + \frac{1}{2(1-\gamma)^2} \frac{dY_t^T}{dt} \sum_t^{-1} (y_t - \mu_t) (y_t - \mu_t)^T \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right) \\ &\quad dF_{y,t}(y_t) dF_{w,t}(w_t) \\ &= W_t \int_{\mathbb{R}^n} \left(r_t + \frac{y_t^T}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} + \frac{1}{2(1-\gamma)^2} \frac{dY_t^T}{dt} \sum_t^{-1} (y_t - \mu_t) (y_t - \mu_t)^T \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right) \\ &\quad dF_{y,t}(y_t) \\ &= W_t \left(r_t + \frac{\mu_t^T}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} + \frac{1}{2(1-\gamma)^2} \frac{dY_t^T}{dt} \sum_t^{-1} \Theta_t \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

式(7)(10)的联立方程组刻画了风险资产收益率与投资者总体财富的演化机制。

从式(10)可以看出,反映个体投资者的收益率预期异质程度的协方差矩阵 Θ_t 通过影响个体投资者的投资策略,不仅影响个体财富增长路径,而且在市场中产生了财富分配效应,进而影响财富总量(即财富分布的期望值)的演进轨迹。根据收益率预期同质条件 $(\Theta_t=0, y_t=\mu_t)$,总体财富演化方程退化为:

$$\frac{dW_t}{dt} = W_t \left(r_t + \frac{\mu_t^T}{1-\gamma} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right) \quad (11)$$

如果进一步假设预期是完全理性的,即 $\mu_t = \frac{dY_t}{dt}$ 意味着实际风险溢价被完全预测到,则: $\frac{dW_t}{dt} = W_t \left(r_t + \frac{dY_t}{dt} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} \right)$ 。只有在这种情况下 $\left(\frac{dY_t}{dt} \sum_t^{-1} \frac{dY_t}{dt} > 0 \right)$,才能得出风险越大收益率越高的结论,否则风险越大收益率越高的结论是不成立的。

在瓦尔拉斯均衡条件下,式(7)等于零,意味着: $P_t = \frac{W_t}{1-\gamma} \text{Diag}(C_t)^{-1} \sum_t^{-1} \mu_t$ 。即股票价格是社会总财富 W_t 的增函数、股票供给量 C_t 的减函数和主观认知的预期收益率 μ_t 或 y_t 的增函数。

在完全代表性理性经济人条件下,根据零交易定理(Zhao & Zhang, 2022; Rubinstein, 1976; Milgrom & Stokey, 1982; Tirole, 1982; Kyle, 1985),根据式(5)这意味着 $z_t = \frac{1}{1-\gamma} \sum_t^{-1} y_t = 0$,即 $E(d p_t + (d_t - r)dt) = 0$,由此推导出资产定价的贴现率模型: $P_t = \frac{E[P_{t+1} + P_t d_t]}{1+r_t}$ 。

关于以上特例的分析表明,本文的异质资产定价模型包含CAPM和贴现率模型、瓦尔拉斯均衡定价模型作为特例,本文的结果是基于传统理论模型的创新。

(四) 收益率预测与最优投资组合的构造

利用联合演化方程(7)和(10),可以设计一套完整的风险资产收益率的预测算法。具体而言,可将联合演化方程(7)和(10)改写为如下离散化时间形式:

$$p_{t+1} - p_t = \alpha \text{Diag}(P_t)^{-1} \left(\frac{W_t}{1-\gamma} \sum_i^{-1} \mu_i - P_t C_t \right) \quad (12)$$

$$W_{t+1} - W_t = W_t \left(r_t + \frac{\mu_t^T}{1-\gamma} \sum_i^{-1} \Delta Y_t + \frac{1}{2(1-\gamma)^2} \Delta Y_t^T \sum_i^{-1} \Theta_i \sum_i^{-1} \Delta Y_t \right) \quad (13)$$

其中:

$$P_t = \exp(\text{Diag}(p_t)) \quad (14)$$

$$\Delta Y_t = p_{t+1} - p_t + d_t - r_t = \alpha P_t^{-1} \left(\frac{W_t}{1-\gamma} \sum_i^{-1} \mu_i - P_t C_t \right) + d_t - r_t \quad (15)$$

结合式(12)–(15)可以得到风险资产的价格、对数价格、收益率和投资者财富总量的联合演化关系,其中依赖的参数向量表示为 $Params_t = (\mu_t, \sum_i, \Theta_i, d_t, r_t, \gamma)$ 。考虑到在现实世界中,投资者的总量财富往往不可直接观测,在后续应用中,本文将利用迭代方程(16),对 $t > 0$ 时期投资者的总量财富 W_t 进行估算。在这个意义上,由式(12)–(15)决定的演化模型可以被视为一个依赖于时变参数组 $Params'_t = (\mu_t, \sum_i, \Theta_i, d_t, r_t, \gamma, W_0)$ 的关于风险资产价格和收益率序列 $\{\Delta Y_t; t=0, 1, \dots\}$ 、 $\{p_t; t=0, 1, \dots\}$ 的演化模型。

给定风险资产的收益率和价格的历史序列 $y_s = \{\Delta Y_t; t=0, 1, \dots, s\}$ 、 $p_s = \{p_t; t=0, 1, \dots, s\}$,为了预测 $s+1$ 期的收益率 $\widehat{\Delta Y}_{s+1}$ 和价格 \widehat{p}_{s+1} ,需要估算模型中的参数 $Params'_s$ 。对每一时期 s ,风险资产红利和无风险利率可通过观测数据计算获得。在时期 s ,参数向量 μ_s 和矩阵 \sum_s 分别表示个体投资者的收益率预期和收益率协方差矩阵的预测值在全市场中的平均值。在具体操作中,本文将采取宽度为 T 的滑动窗口的向量自回归模型(vector auto-regressive, VAR)从历史收益率 Y_s 中估算 $\{\mu_t; t=0, 1, \dots, s\}$,使用经典的 DCC 方法(Harris et al, 2017)估算 $\{\sum_i; t=0, 1, \dots, s\}$ 。

对于其他参数 γ 、 W_0 和 Θ_s ,初始时刻投资者的财富总量 W_0 和相对风险厌恶系数 γ 难以直接观测; Θ_s 作为 s 时期个体投资者收益率预期的协方差矩阵,也无法根据真实的价格数据和收益率数据直接观测。因此,本文将以联合演化方程(12)–(15)为基础,采用基于滑动窗口的极大似然法对它们进行估算。具体而言,给定滑动窗口宽度 T ,考虑如下引入随机冲击的价格演化方程:

$$p_{s+1} - p_s = \alpha P_s^{-1} \left(\frac{W_s}{1-\gamma} \sum_s^{-1} \mu_s - P_s C_s \right) + \epsilon_s \quad (16)$$

其中,随机冲击项满足: $\epsilon_s \sim N\left(0, \alpha^2 \frac{W_s^2}{(1-\gamma)^2} \text{Diag}(P_s)^{-1} \sum_s^{-1} \Theta_s \sum_s^{-1} \text{Diag}(P_s)^{-1}\right)$,即在该设定下,随机冲击可以理解为需求端的冲击,其经济含义在于市场是实时成交的,尽管在每个时刻每个个体投资者都会基于其主观的收益率预期形成对风险资产的需求式(5),但不是每个投资者都可以在当前时刻真正实现交易。根据目前世界上主流的交易所采用的基于排队系统的交易和定价规则(Karel & Kabrhel, 2007; Zhao & Zhang, 2022),每一时刻只有市场中的一小撮个体投资者能真正完成交易,相应地,也就只有这一小撮投资者的需求才能决定当前价格。从建模的角度看,这部分可进行交易的投资者可以被视为从市场中依照投资者分布随机抽取获得的,在本文的设定下,这等同于从市场的异质性预期分布中随机抽取一个代表性预期。相应地,风险资产需求端的随机冲击等价于从市场中个体投资者的需求分布中进行随机抽样。在这个意义上,由个体需求函数(5)和投资者收益率预期在总体中的分布,风险资产价格演化过程中的随机冲击服从式(16)中的正态分布。

而在冲击下真实需求偏离理论需求式(5)的概率由市场中特定个体投资者的收益率预期偏离市场均值的概率决定。

在此基础上,由于我们只关心对于 $s+1$ 期的收益率和价格预测,在选定滑动窗口宽度为 T 后,我们可将基期设为 $s-T$,从而基期财富 W_0 由 W_{s-T} 取代。对于基期以后的位于滑动窗口 $\{s-T, s-T+1, \dots, s\}$ 内的每一个时期 s' ,通过迭代式(13)可获得 $W_{s'}$ 。在给定的风险厌恶系数 γ 、基期财富 W_{s-T} 和

Θ_s , 利用历史收益率和价格序列, 可得如下似然函数:

$$l(\Theta_s, W_{s-T}, \gamma) = \prod_{s'=s-T}^{s-1} \frac{1}{\left((2\pi)^{\frac{n}{2}} \alpha^n \frac{W_{s'}^n}{(1-\gamma)^n} \mid \text{Diag}(P_{s'})^{-1} \sum_{s'}^{-1} \Theta_s \sum_{s'}^{-1} \text{Diag}(P_{s'})^{-1} \mid \right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \exp \left(- \frac{\left(p_{s'+1} - p_s - \alpha \text{Diag}(P_{s'})^{-1} \left(\frac{W_{s'}}{1-\gamma} \sum_{s'}^{-1} \mu_s - P_s C_s \right) \right)^2}{\alpha^{2n} \frac{W_{s'}^{2n}}{(1-\gamma)^{2n}} \text{Diag}(P_{s'})^{-1} \sum_{s'}^{-1} \Theta_s \sum_{s'}^{-1} \text{Diag}(P_{s'})^{-1}} \right) \quad (17)$$

通过以上似然函数的最大化可以得到最大似然估计值 $\hat{\gamma}$ 、 \hat{W}_{s-T} 和 $\hat{\Theta}_s$, 将其与 μ_s 、 Σ_s 的估计值代入式 (15), 可以得到风险资产的对数价格的估计值 \hat{p}_{s+1} , 进而通过式 (15) 得到风险资产的真实收益率在 $s+1$ 时期的外推估计值 $\Delta \hat{Y}_{s+1}$ 。

给定收益率预测值 $\Delta \hat{Y}_{s+1}$, 在原假设下, 即风险资产的价格演化遵循带随机冲击的方程 (16), 风险资产真实收益率将近似服从均值为 $\Delta \hat{Y}_{s+1}$ 、协方差矩阵为 $\alpha^2 \frac{W_s^2}{(1-\gamma)^2} \text{Diag}(P_s)^{-1} \sum_s^{-1} \hat{\Theta}_s \sum_s^{-1} \text{Diag}(P_s)^{-1}$ 的正态分布, 进而利用式 (5) 的组合优化框架 (在给定收益率期望和协方差矩阵下等价于 Markowitz 基于均值方差的投资组合优化框架), 可以计算最优投资组合 Z_{s+1}^h , 其表达式如下:

$$Z_{s+1}^h = \left(\alpha^2 \frac{W_s^2}{(1-\gamma)^2} \text{Diag}(P_s)^{-1} \sum_s^{-1} \hat{\Theta}_s \sum_s^{-1} \text{Diag}(P_s)^{-1} \right)^{-1} \Delta \hat{Y}_{s+1} \quad (18)$$

四、实证检验

本部分将结合中国 A 股数据, 考察本文的模型与其他主流资产定价和投资组合模型在收益率预测精度和最优投资组合收益的表现, 通过对比分析展现本文模型的优势。

(一) 数据来源和比较基准

本文搜集了 2018 年 3 月至 2022 年 3 月全部 A 股上市公司每个交易日的股票价格数据和股票分红数据, 数据来自国泰安数据库。由于算力有限, 我们无法处理由全部 A 股上市公司作为资产池的全市场样本, 因此对构成资产池的股票样本进行了筛选。为避免样本选择带来的偏差, 本文采取一种准随机方式选择用于构建投资组合的股票池。具体而言, 根据全部 A 股上市公司在样本期内的平均市值, 按由小到大排序后分别选取了市值排行位于 10% 分位点、20% 分位点、……、100% 分位点的 10 支股票作为资产池。本文强调, 这种选择方式兼顾了资产池的随机性和对市场整体的代表性。就随机性而言, 按市值升序排列后的分位数选股过程等价于利用逆采样 (inverse sampling) 方式生成满足股票市值分布的 k 个样本点。当样本量 k 足够大时, 这一过程生成的资产池与完全随机地从股票市值分布中抽取的资产池 (抽取后依市值排序) 是依分布等价的。虽然本文仅选择 $k=10$ 支股票, 距完全随机选股还有一定的距离, 但本文的做法仍然实现了近似随机化。另外, 本文并没有采用完全随机的方式抽取 10 支股票, 是因为在样本容量较小的情况下, 随机抽取的股票很可能呈现非均匀分布的特征, 即 10 支股票都聚集在某个行业或某个市值规模附近, 这将导致样本资产池缺乏对整个股市的代表性。尽管采取反复多次抽样的方式可以克服这种有偏抽样的问题, 但反复抽样意味着本文的模型也需要被反复多次估计, 这会大大增加模型拟合的计算复杂度, 在本文面临的算力限制下不具有可行性。因此, 为了在算力容许的条件下规避这种有偏的资产池选择, 本文选择按市值排序和分位数抽取方法构建资产池。

在依市值分布的分位数进行筛选后, 得到的 10 支股票分别是工商银行 (601398)、铜陵有色 (000630)、东方集团 (600811)、浙大网新 (600797)、中曼石油 (603619)、伟星股份 (002003)、兴化股份 (002109)、盛天网络 (300494)、旭光电子 (600353) 以及恒基达鑫 (002492)。可以看到, 以上 10 支股票涉及金融、能源、矿产、农业、化工、服装、电子电器、科技、互联网等行业, 几乎覆盖了 A 股上市公司

的全部大类行业。在表 2 和表 3 中,本文分别报告了以上 10 支股票市值和价格的描述性统计以及 10 支股票价格在样本期内的相关系数矩阵。从表 2 中可以看出,除工商银行这只大盘蓝筹股外,其余 9 只股票在样本期内价格的相对波动幅度(以股票价格的变异系数衡量,即股票价格序列的标准差与均值之比)都在 12% 以上,而其中 7 只股票的相对波动幅度超过 20%,中曼石油的相对波动幅度甚至超过 50%。在表 3 中,10 支股票价格波动的相关系数普遍远离于零,这意味着 10 支股票价格的波动之间存在着显著的相关关系。从上述 10 支股票在样本期内收益率的日变动轨迹可以看出,不同股票的收益率在峰谷值、整体波动幅度、波动聚集区间等方面都存在着显著的差异,因此不同股票之间呈现出一定的互补性。从事后角度看,这意味着在样本期内,存在着采取动态调整的积极组合策略进行风险对冲、获得超额收益的可能性。接下来,本文将针对不同的收益率预测方法构建不同的积极组合策略,进而通过比较分析,检验本文的 HAM 模型在识别具有潜在超额收益的积极组合策略方面的能力。

表 2 10 支股票价格和流通市值的描述性统计

	观测值	价格(元)				流通市值(亿元)			
		均值	标准差	最小值	最大值	均值	标准差	最小值	最大值
工商银行	910	5.51	0.52	4.61	7.89	14598.47	1387.41	12213.43	20894.95
铜陵有色	910	40.51	8.91	29.68	84.91	256.79	63.48	186.43	563.16
东方集团	910	49.66	7.47	37.33	71.91	134.1	17.41	105.87	203.93
浙大网新	910	105.49	22.71	69.77	168.59	86.03	15.17	60.21	125.52
中曼石油	910	18.17	9.32	8.03	48.93	25.49	13.47	7.01	73.28
伟星股份	910	66.15	14.31	45.87	129.86	47.24	10.03	33.3	94.21
兴化股份	910	14.04	3.21	9.74	26.11	32.6	15.96	13.26	81.81
盛天网络	910	28.82	6.61	17.22	54.6	20.18	7.34	7.99	43.58
旭光电子	910	35.75	4.25	24.08	53.41	29.17	3.49	19.9	43.86
恒基达鑫	910	17.52	2.27	13.29	27.15	22.83	2.37	17.64	31.96

表 3 10 支股票价格样本期内的相关系数矩阵

	工商银行	铜陵有色	东方集团	浙大网新	中曼石油	伟星股份	兴化股份	盛天网络	旭光电子	恒基达鑫
工商银行	1***	-0.3***	0.48***	0.72***	0.69***	-0.02	-0.18***	-0.14***	0.15***	0.4***
铜陵有色	-0.3***	1***	-0.35***	-0.33***	-0.06**	0.63***	0.89***	0.23***	0.31***	0.11***
东方集团	0.48***	-0.35***	1***	0.66***	0.62***	-0.05	-0.29***	0.25***	0.31***	0.57***
浙大网新	0.72***	-0.33***	0.66***	1***	0.75***	0.02	-0.28***	0.19***	0.45***	0.65***
中曼石油	0.69***	-0.06**	0.62***	0.75***	1***	0.4***	0.07**	0.04	0.27***	0.69***
伟星股份	-0.02	0.63***	-0.05	0.02	0.4***	1***	0.64***	0.23***	0.35***	0.37***
兴化股份	-0.18***	0.89***	-0.29***	-0.28***	0.07**	0.64***	1***	0.05	0.19***	0.18***
盛天网络	-0.14***	0.23***	0.25***	0.19***	0.04	0.23***	0.05	1***	0.7***	0.35***
旭光电子	0.15***	0.31***	0.31***	0.45***	0.27***	0.35***	0.19***	0.7***	1***	0.48***
恒基达鑫	0.4***	0.11***	0.57***	0.65***	0.69***	0.37***	0.18***	0.35***	0.48***	1***

注:*、**和***分别表示在 10%、5%和 1%的水平上显著。

利用 10 支股票在样本期内的日交易价格数据和分红数据以及十年期国债收益率(转化为日利率)代表的无风险利率数据,本文使用上文中介绍的拟合算法估计模型相关参数。具体而言,参数估计分为两个步骤。第一步,选择代表一整年交易日数量的滑动窗口宽度 $T=250$,在给定交易日 t ,使用 $t-T, t-T+1, \dots, t-1$ 期间内综合了股票价格变动(资本收益)与分红的收益数据,估计经典的向量自回归模型和 DCC-GARCH 模型,并依据估计结果计算 10 支股票在 t 期的市场平均的收益率预期 μ_t 和协方差矩阵 Σ_t 。第二步,对于每个交易日 t ,将滑动窗口 $t-T, t-T+1, \dots, t-1$ 内的股票收益数据和估算的市场平均收益率预期与协方差矩阵数据代入(17)中的似然函数,使用极大似然法

估算出 t 期对应的参数矩阵 Θ_t 及其他参数,并将其代入式(12)–(15)计算股票收益率在 $t+1$ 期的预测值,以此为基础利用式(18)计算 t 期最优投资组合中 10 支股票的相对比例。在此基础上,随着时间 t 的推移,投资组合式(18)提供了一种动态调整的股票持仓策略,本文将对比这种动态调仓策略与其他组合策略的收益表现。

本文的样本期包含 910 个交易日,在滑动窗口 T 设定为 250 个交易日(即一年内的交易日总数)的基础上,前述两步估计法将损失掉 $500(=250 \times 2)$ 个初始交易日数据,从而最终获得 $410(=910 - 250 \times 2)$ 个交易日的交易数据作为检验收益率预测和投资组合盈利表现的外推测试集。尽管模型的参数估计值并非本文的关注重点,但考虑到由式(12)–式(15)所给出的异质性投资者定价模型本质上属于一类特殊的股价动量模型(He & Li, 2014; He et al, 2018),基于滑动窗口方式估算模型时会将市场的部分趋势特征编码进模型的时变参数中。对此,对本文模型中的核心参数——即反映投资者预期异质性与相关性程度的时变矩阵 Θ_t 及其中元素 $\Theta_{ij,t}$ 的估计值序列的自相关性进行了图示报告。结果表明, $\Theta_{ij,t}$ 的自相关系数整体分布于 0 右侧,即在样本期内 $\Theta_{ij,t}$ 序列基本呈正向自相关关系,这一点与文献中关于动量模型实证特征的描述相一致(He & Li, 2014; He et al, 2018),因此验证了本文模型作为一类动量模型的数学本质。但另一方面,从自相关系数的量级上看,数值整体不高,这意味着, $\Theta_{ij,t}$ 的正相关程度普遍较弱,这从另一个角度验证了中国 A 股市场中投资者的信念分布结构在整体上具有高度的不确定性,从而难以仅依赖过往市场中的投资者分布信息对未来市场的投资者结构进行预测。

接下来,本文将从收益率预测值 $\Delta \hat{Y}_{t+1}$ 的精确度和基于收益率预测的优化投资组合式(24)的盈利表现两个角度,对本文的连续化异质性投资者模型与其他经典资产定价/投资组合模型进行对比分析。在收益率预测精度上,本文主要考察的替代模型为向量自回归(vector-auto-regressive, VAR)模型,对于测试集内的每个交易日 t ,将对比 VAR 模型给出 $t+1$ 期的收益率预测、本文的演化模型(12)–(15)给出的收益率预测与真实的 $t+1$ 期收益率的偏离程度及其分布。鉴于式(15)属于动态调整的积极配置型投资策略,而常用的投资策略既包含类似的需要动态调整的积极配置策略,同时也包括基于“拇指法则”的消极配置策略。因此,在盈利能力的对比上,本文考察的替代模型将包括积极配置和消极配置两类模型,其中积极配置策略为基于 VAR 模型的实时收益率预测和 Markowitz 的均值方差优化的投资组合,而消极配置模型包括由资本资产定价模型中的股票市值比确定的市场组合和等额持有 10 支股票资产的完全分散化组合。针对以上投资组合,本文将计算测试集内每个交易日 t 的真实组合收益率,并基于真实组合收益率的时间序列,从收益和风险两个维度比较各种不同组合策略的盈利表现。

需要强调,在实证分析设定上,本文将向量自回归模型选为基准模型进行收益率预测和投资组合表现的对比分析,但这并不意味着,自回归模型是唯一可行的基准模型。事实上,从实证角度看,基于本文异质性投资者模型的收益率预测可以看作是对个体投资者收益率预期的群体均值的一个修正,这种修正考虑了市场中投资者的分布结构,从而反映了市场结构对于资产价格的影响。给定任何一种估算个体收益率预期的群体均值的方法,在此基础上异质性投资者模型给出的收益率预测不过是对基准方法所作预测的修正。在此基础上,本文对不同收益率预测方法进行对比分析的目的在于,探究在基准预测模型的基础上融入市场投资者结构因素,是否能够增加收益率预测的精确程度和投资组合的盈利能力。根据这一研究目的,在选择比较基准时,核心原则是保持基准收益率预测模型与用于生成异质性投资者模型中的个体收益率预期的群体均值的模型之间的一致性。相比之下,具体选择何种基准方法估算收益率预期的群体均值并不是本文实证分析的重点。这也意味着,本文可以考虑不同的收益率预测模型,例如将主流的多因子模型选为估算收益率预期群体均值的方法,并同时将其作为收益率预测的比较分析基准。但相比之下,因子模型在应用中需要进行大量的数据预处理工作,以识别和选择适合的因子,而自回归模型在形式上更为简洁,更加便于应用。至于融合更加主流的多因子模型进行实证分析和比较分析,并非本文的核心目标,因此本文将其留

做未来的拓展研究方向。

(二) 基于收益率预测精度的对比分析

这里将在收益率预测精度的维度上,对比分析本文的收益率预测模型与 VAR 模型的相对表现。表 4 报告了针对本文遴选的 10 支股票,两种预测模型在测试集的 410 个交易日内的外推收益率预测表现。其中,预测偏误比 $Bias$ 由以下计算公式获得:

$$Bias = \frac{\sum_{t=1}^{410} (\widehat{\Delta Y}_t - \Delta Y_t)}{\sum_{t=1}^{410} |\Delta Y_t|} \quad (19)$$

其中, ΔY_t 和 $\widehat{\Delta Y}_t$ 分别表示 t 期的真实收益率和收益率预测值。由于收益率的量纲很小,因此,在上式中除去真实收益率之和可以剔除量纲的影响,在这个意义上 $Bias$ 应被理解为收益率预测值与其真实值的偏离比率,即预测偏误比。在此基础上,偏误比标准差计算公式为:

$$Std = \sqrt{410 \times \sum_{t=1}^{410} \left(\frac{\widehat{\Delta Y}_t - \Delta Y_t}{\sum_{t=1}^{410} |\Delta Y_t|} - \frac{Bias}{410} \right)^2} \quad (20)$$

偏误比标准差反映了收益率预测值偏离真实值的比例的标准差。在此基础上,表 4 中的 5% outlier 列给出了在收益率预测偏误比服从正态分布的原假设下,两种模型在 410 个交易日的预测偏误比超过正态分布 95% 置信区间的比例,这一比例刻画了两种模型收益率预测的极值风险,如果该比例超过 5%,意味着收益率预测偏误比的真实分布具有厚尾特征,因此相较于正态分布有着更高的极值风险。

为了保证比较结果的稳健性,本文进一步考察了样本外拟合优度作为衡量收益率预测精度的替代标准,其中样本外拟合优度由样本外收益率预测值的 R^2 统计量刻画,其具体计算方式为: $Outsample R^2 = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{410} |\widehat{\Delta Y}_t - \Delta Y_t|^2}{\sum_{t=1}^{410} |\Delta Y_t - \overline{\Delta Y}|^2}$ 。其中, $\overline{\Delta Y} = \sum_{t=1}^{410} \Delta Y_t / 410$ 表示给定股票收益率外推样本期内的均值。

从表 5 中可以发现,在 10 支股票的收益率预测上,测试期内基于演化方程(12)–(15)的一期外推预测与 VAR 模型的预测在偏误比和偏误比标准差上,表现各有优劣、基本相当,这一结论在基于样本外拟合优度衡量的收益率预测精度上也同样成立。如果考察尾部特征和极值风险,表 4 中的 5% outlier 列显示,在基于演化方程(12)–(15)的预测偏误比中,超过 95% 置信区间的比例基本上在其理论值 5% 上下浮动,而在 VAR 模型的预测偏误比中,超过 95% 置信区间的比例普遍高于 5%。由于表 4 中计算 5% outlier 时使用的 95% 置信区间是基于原假设计算得到,即收益率预测偏误比服从正态分布时的 95% 置信区间,因此,VAR 模型预测的极端偏差发生频率高于原假设下的置信区间意味着原假设大概率不成立,其偏误比应服从更加厚尾的分布函数。而这种对于正态分布的偏离也意味着,使用 VAR 模型进行收益率外推预测会引致对极端值风险的低估。相较之下,本文基于演化方程(12)–(15)的预测偏误比在 95% 的尾端区域与正态分布基本吻合,意味着收益率预测的极值风险可以在常规的正态分布假设下得到较为精确地测度。在这个意义上,连续化异质性投资者模型能够更好地捕捉股票市场中真实收益率的动态演化趋势。

表 4 模型预测偏误

股票名称/代码	HAM Bias	VAR Bias	HAM Std	VAR Std	HAM 5% outlier	VAR 5% outlier	HAM out-sample R^2	VAR out-sample R^2
工商银行(601398)	-0.276	-0.067	4.864	2.157	4.2%	4.2%	0.87	0.927
铜陵有色(000630)	0.164	0.159	2.003	2.017	4.9%	5.1%	0.965	0.965
东方集团(600811)	-0.158	-0.078	1.892	1.614	5.4%	5.9%	0.968	0.977
浙大网新(600797)	-0.179	-0.062	2.479	1.993	5.9%	6.4%	0.95	9.968
中曼石油(603619)	-0.017	0.031	1.779	1.971	4.4%	7.1%	0.951	0.94

股票名称/代码	HAM Bias	VAR Bias	HAM Std	VAR Std	HAM 5% outlier	VAR 5% outlier	HAM out-sample R ²	VAR out-sample R ²
伟星股份(002003)	0.139	0.269	1.918	1.971	4.9%	5.1%	0.981	0.977
兴化股份(002109)	-0.013	0.125	1.889	2.227	5.6%	6.6%	0.974	0.964
盛天网络(300494)	-0.033	0.042	1.679	1.893	5.4%	6.1%	0.942	0.926
旭光电子(600353)	0.112	0.114	2.119	2.009	5.1%	4.4%	0.88	0.877
恒基达鑫(002492)	-0.167	0.02	2.214	1.725	4.4%	5.9%	0.882	0.884

(三) 基于优化投资组合盈利能力的对比分析

这里将基于 A 股上市公司数据,对比以下四种投资组合的实际盈利能力:(1)基于本文收益率预测的最优投资组合式(18)(记为 HAM 组合);(2)基于时间序列计量模型 VAR 的收益率预测的 Markowitz 最优投资组合(记为 VAR 组合);(3)市场组合(即以股票市值比为权重的投资组合);(4)完全分散化的投资组合(即十种股票的持有比重均为 1/10 的投资组合)。

表 5 四种组合策略的收益风险分析

指标	HAM 组合	完全分散化组合	VAR 组合	市场组合
日均收益率(\bar{Y} , %)	1.702	0.001	0.218	-0.001
波动率($\sqrt{Va_{rY}}$)	17.226	0.013	28.566	0.01
夏普指数($\bar{Y}/\sqrt{Va_{rY}}$)	0.099	0.087	0.008	-0.016
负向波动率($\sqrt{Va_{rY<0}}$)	10.123	0.009	26.732	0.006
最大回撤(%)	-55.566	-0.05	-154.884	-0.049
回撤频率	49.1%	45.7%	53.5%	46.7%
相对回撤频率(基准:HAM 组合)		50.4%	48.9%	52.1%

表 5 总结了以上四种投资组合在整个测试期内的总盈利水平和各种度量方式下的总体风险水平。首先,无论是组合的绝对日均收益率还是考虑了风险后的夏普指数,本文的 HAM 组合都显著高于市场组合、分散化组合和 VAR 组合,这证明了 HAM 组合具有优异的绝对收益表现和相对收益表现。而从组合波动率来看,以测试期内组合收益的标准差测度,HAM 组合的波动率高于市场组合与完全分散化组合,这在很大程度上是由于在市场组合与完全分散化组合中都不考虑风险资产的买空卖空,不涉及杠杆,整体波动率较低。在这个意义上,HAM 组合更高的波动率与更高的日均收益率可以理解为容许买空卖空和财务杠杆所带来的风险溢价。另外,与同样容许买空卖空和财务杠杆的 VAR 组合相比,HAM 组合与 VAR 组合的波动率量级相当,但 HAM 组合的波动率绝对值更低。如果进一步考察引致财富损失的负向波动,则 HAM 组合的负向波动率显著低于 VAR 组合。这意味着,在同样容许买空卖空和积极调仓行为的前提下,HAM 组合的损失发生频率更低,这表明相较于基于时间序列的 VAR 模型,本文基于异质性投资者模型的收益率预测更为精确,特别是在考虑了风险加成后,精度提升更为显著。

就风险控制指标而言,HAM 组合的最大回撤与回撤频次都显著低于 VAR 组合,同时显著高于市场组合与完全分散化组合,体现了 HAM 组合的高收益对应的高风险溢价。这一点与基于波动率的分析结论一致,其根本原因在于基于异质性投资者模型的投资组合是允许买空和卖空操作的,而市场组合和完全分散化组合都是禁止买空卖空持仓的,因此,由于杠杆的引入,组合收益率的波动会被显著放大,这就导致了 HAM 组合的最大回撤显著高于市场组合与完全分散化组合。另外,作为对照的 VAR 组合,其构建方式与本文的 HAM 组合相同,即都是基于均值方差效用函数与收益率、

波动率的预测值构造的容许买空卖空持仓策略的投资组合,只是二者所依赖的预测值不同。正是在这个意义上,在表5中的四个策略中,只有HAM与VAR组合在回撤这个维度上是直接可比的,而HAM组合的最大回撤尽管远高于市场组合与完全分散化组合,但却远远低于与其具有可比性的VAR组合的最大回撤。从这个意义上看,HAM组合的回撤表现在总体上是合理且可接受的。

为了考察不同组合的相对风险表现,本文考察了以HAM组合为基准的其他三种组合的相对回撤频次,而相对回撤频次被定义为在样本期内选定组合的收益率低于基准组合收益率这一事件的发生频次。在HAM组合的基准下,市场组合与完全分散化组合的相对回撤频次均高于50%,这意味着,尽管HAM组合以绝对回撤频次衡量的风险更高,但在以相对回撤频次衡量的相对风险上,HAM组合则要低于两种基于“拇指法则”的被动投资组合,因此,相对收益更高,这也体现为一种风险溢价。

综合来看,基于异质性投资者模型的HAM组合相较于其他三种组合而言,具有更高的日均收益率,也伴随更高的投资风险,而更高的收益率可以被视为高风险引致的收益溢价。针对HAM组合的风险溢价是否足以覆盖超额的投资风险,本文选用广泛使用的夏普指数进行评估。夏普指数利用收益一波动比计算经风险折价的收益率,因此可以视为剔除了风险及溢价后的平价收益率。根据表5中报告的结果,HAM组合的夏普指数显著高于其他三种组合策略,这意味着同比例地增仓四种组合,由HAM组合所带来的单位风险成本上升对应的日均收益率溢价显著高于其他三种组合策略,因此,在考虑了风险折价后,HAM组合的综合风险收益表现仍然显著优于其他组合。

表5中考察的是在测试集全样本上的日收益率均值和日收益的波动率,聚焦于日收益等于预设了投资者对组合收益的评估建立在以一个交易日为单位的极短的持有周期之上。而现实世界中,鲜有投资者仅关注一个交易日内的风险收益权衡,多数投资者会关注更长的持有周期内的风险收益权衡。短期内过大的风险波动很可能使得投资者偏离既定的组合策略,从而无法获得长期坚持既定组合策略所能获得的收益;而相对长期的持有周期则有助于规避短视带来的非理性操作。对此,本文针对不同的持有期限计算了期限内各组合策略的累计收益率、累计收益的波动率和相应的夏普指数。在图1中,本文分别针对持有期为30、60、90、120和250个交易日的五种情形,以这五个持有期限为时间滑动窗口 T ,在每个起始时间点 t 上,计算每个窗口期 $[t, t+T)$ 内四种组合策略的夏普指数,并在图1的五幅子图中分别画出了对应于 $T=30, 60, 90, 120, 250$ 五种情况下每种组合策略的夏普指数随起始时点 t 的变化轨迹。

从图1中,不难发现,对于全部五个持有周期 T 、测试集内的全部初始时刻 t ,HAM组合的夏普指数在四种策略中几乎都不是最低的。同时,随着持有周期的延长,HAM策略夏普指数的回撤频次与回撤幅度呈下降态势,当持有周期延长至120个交易日时,除了在三个个别的初始时刻 t 上HAM组合的夏普指数略小于零外,其他时刻HAM组合的夏普指数全部为正。相比之下,其他三种组合策略的回撤幅度与回撤频次在不同的持有周期下几乎没有变化。而当持有周期延长至250个交易日(约为一个交易年度)时,HAM组合的夏普指数在测试期内始终为正,并且在测试期内的绝大多数时间段内,都是四种组合策略中最高的。表6中总结了在图1中的五个投资周期设定下,四种组合策略在测试期内的收益率轨迹的整体统计特征,其中的结果进一步确认了图1中观察到的HAM组合的盈利表现随投资期限延长而提升的变化趋势。特别值得注意的是,当投资期限为一个交易年度(250个交易日)时,HAM组合在整个测试期内的最小收益为正,并且高达2.5%,这一数值显著高于VAR组合的-2.3%与市场组合的-7.2%,甚至高于完全分散组合的0.4%。以上观察表明,HAM组合相较于其他组合策略具有相对稳健的盈利表现,并且随着持有周期的延长,盈利和抗风险能力将增强,因此,HAM组合投资策略比较适用于投资期限较长的投资者。

总之,基于中国A股上市公司的历史数据的实证分析表明,无论是在风险资产的收益率预测精度上、还是在投资组合的盈利能力与风险控制上,本文连续化异质性投资者模型的表现都明显优于其他主流模型,这预示着本文模型具有潜在的实用价值。

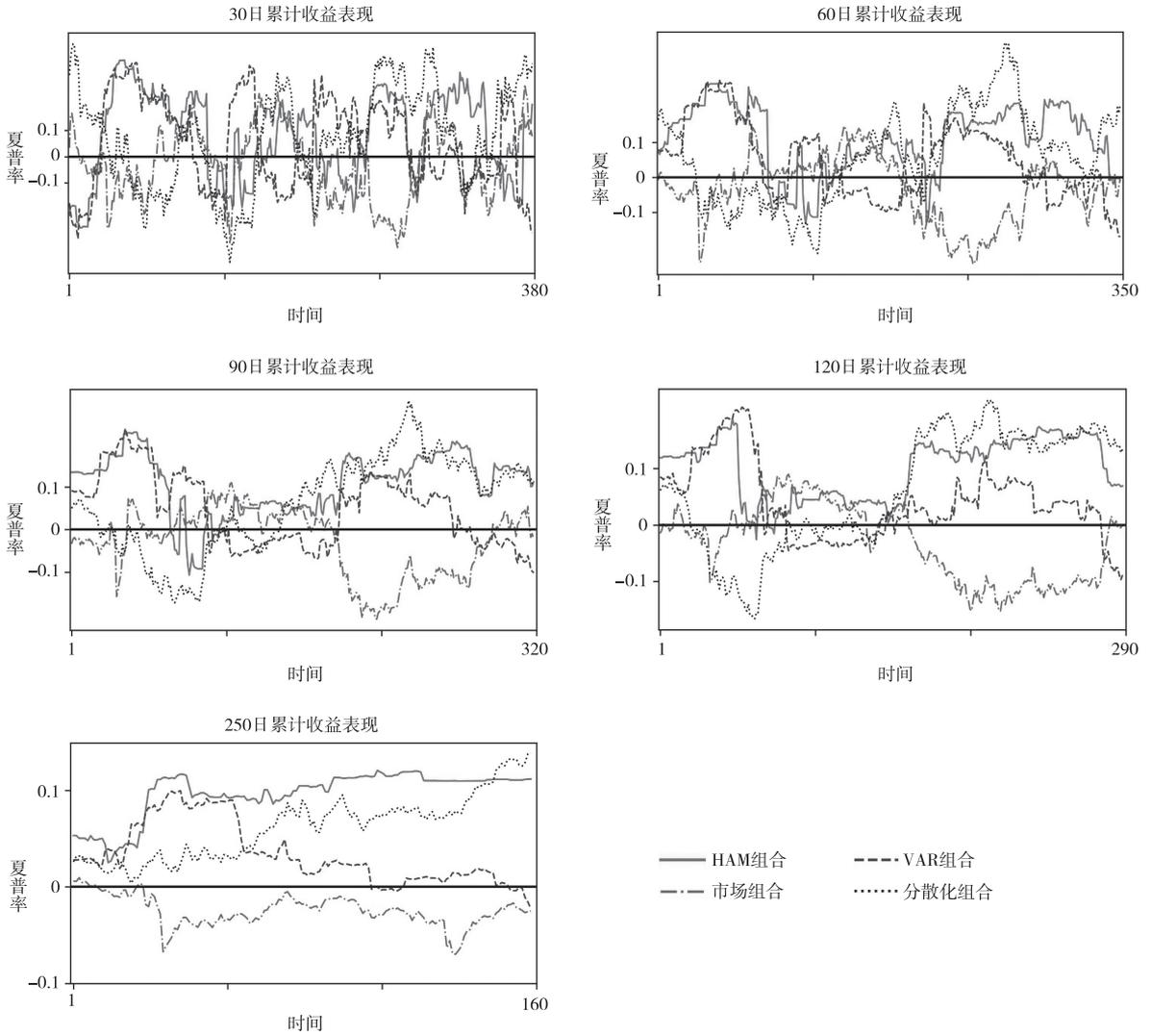


图1 四种组合策略的在不同投资期限下的盈利分析

表6 不同投资期限下四种组合策略收益的描述性统计

投资期限(交易日)	30	60	90	120	250
HAM 平均收益率	0.091	0.119	0.115	0.108	0.102
HAM 收益波动率	0.188	0.107	0.079	0.06	0.026
HAM 最小收益	-0.313	-0.142	-0.113	-0.026	0.025
HAM 最大收益	0.446	0.307	0.257	0.207	0.128
市场组合平均收益率	-0.036	-0.038	-0.032	-0.034	-0.025
市场组合收益波动率	0.153	0.1	0.086	0.071	0.016
市场组合最小收益	-0.416	-0.28	-0.235	-0.164	-0.072
市场组合最大收益	0.319	0.158	0.116	0.094	0.009
VAR 平均收益率	0.058	0.053	0.049	0.042	0.034
VAR 收益波动率	0.194	0.117	0.089	0.073	0.033
VAR 最小收益	-0.368	-0.186	-0.107	-0.102	-0.023
VAR 最大收益	0.433	0.322	0.268	0.232	0.105
分散化组合平均收益率	0.085	0.065	0.065	0.068	0.064

投资期限(交易日)	30	60	90	120	250
分散化组合收益波动率	0.221	0.148	0.122	0.112	0.036
分散化组合最小收益	-0.498	-0.244	-0.188	-0.181	0.004
分散化组合最大收益	0.54	0.469	0.354	0.248	0.148

五、结语

针对经典资产定价模型和 Markowitz 投资组合理论存在的问题,本文在投资者异质信念、有限理性和市场非瓦尔拉斯均衡定价机制的基础上,针对多风险资产场景构建了一个连续化异质性投资者模型,推导出了风险资产收益率和投资者财富动态演化方程组,并以此为基础构建了风险资产收益率的预测模型与最优投资组合决定模型。

首先,本文在理论方面具有明显的特色与创新之处。第一,不同于传统异质投资者模型将投资者分为价值投资者、趋势投资者、随机选取者等有限几个固定类别,本文对异质预期投资者的分类采取连续化的处理方式,假设个体的对数收益率预期是可以取任意实数的随机变量,其在全体投资者中的分布由给定的连续概率分布函数加以刻画。这种对异质预期的处理避免了研究者在投资者分类上的主观随意性,便于在更一般的意义上刻画异质预期对价格形成的影响。第二,本文设定市场以撮合定价方式调整风险资产价格,使风险资产价格的变化与供求缺口的变化相适应,这种异质性资产定价模型体现了对经典异质资产定价模型的拓展。第三,本文的异质资产定价模型包含 CAPM 和贴现率模型、瓦尔拉斯均衡定价模型作为特例,是基于传统理论模型的创新。

其次,在应用层面上,本文基于异质性投资者模型提出了一套风险资产收益率预测的新方法,并以此为基础构建了优化投资组合。利用中国 A 股上市公司数据证明,上述收益率预测模型和投资组合选择模型的整体表现优于其他经典的定价与投资组合模型,从而说明本文模型具有潜在的应用价值,也证明了本文引进投资者异质性、有限理性和市场非均衡定价等假设的合理性。

最后,本文的理论模型还存在着进一步拓展的空间。第一,尽管本文通过相对风险厌恶的效用函数引入了财富对于风险资产需求、资产价格和收益率的动态影响,但在个体投资者行为方面,并未对投资者买空卖空风险资产的最大比例加以限制。而在现实世界中,无论是相对完善的欧美资本市场,还是欠发达国家的资本市场,对于个体投资者的买空卖空行为都施加了诸多限制,因此,一个更加贴近现实世界资本市场的模型应当考虑受约束的买空卖空行为,这应该是本文理论模型的一个拓展方向。第二,本文模型中的关键参数—协方差矩阵 Θ ,反映群体中个体投资者的收益率预期的差异和相关性程度,是由市场中的个体投资者对于市场的认知与个体投资者彼此之间的互动过程决定的,但本文并未对 Θ 的决定过程展开深入探讨。BL 模型利用贝叶斯更新规则为意见领袖与一般个体投资者之间的相互作用如何决定 Θ 的变化提供了一种直观解释。由于 Θ 本身处于演化过程中,而且它的演化与风险资产的价格、收益率以及个体投资者财富的演化协同进行,因此研究协方差矩阵 Θ 的演化及其对市场演化的影响是一个值得努力的方向。第三,尽管本文的实证分析聚焦于股票市场上不同的股票资产,但本文的模型框架可以应用于更广泛的不同大类的风险资产的组合问题,如股票与外汇、债券等不同大类资产的投资组合构建问题。由于不同大类资产背后的收益驱动因素不同,这会给个体投资者预期的群体分布结构带来额外的复杂性和结构特征,如何捕捉这些特征及其对收益预测和组合构建的理论寓意,亦是未来研究值得深入的方向。

参考文献:

- 龚六堂,2002:《动态经济学方法》,北京大学出版社。
- 郝军章 翟嘉 高亚洲,2020:《投资者进出对股票市场波动性影响研究——基于投资者异质信念定价模型》,《投资研究》第 7 期。
- 李斌 邵新月 李玥阳,2019:《机器学习驱动的基本面量化投资研究》,《中国工业经济》第 8 期。

- 张维 张永杰, 2006:《异质信念、卖空限制与风险资产价格》,《管理科学学报》第9期。
- 张维 赵帅特, 2010:《认知偏差、异质期望与资产定价》,《管理科学学报》第1期。
- 周爱民 遥远, 2019:《高风险有高收益吗》,《财经科学》第3期。
- Beach, S. L. & A. G. Orlov(2007), “An application of the Black-Litterman model with EGARCH-M-derived views for international portfolio management”, *Financial Markets and Portfolio Management* 21(2):147–166.
- Bessler, W., H. Opfer & D. Wolff(2017), “Multi-asset portfolio optimization and out-of-sample performance: An evaluation of Black-Litterman, mean-variance, and naïve diversification approaches”, *European Journal of Finance* 23(1):1–30.
- Black, F. & R. B. Litterman(1991), “Asset allocation: Combining investor views with market equilibrium”, *Journal of Fixed Income* 1(2):7–18.
- Black, F. & R. B. Litterman(1992), “Global portfolio optimization”, *Financial Analysts Journal* 48(5):28–43.
- Borovička, J. (2020), “Survival and long-run dynamics with heterogeneous beliefs under recursive preferences”, *Journal of Political Economy* 128(1):206–251.
- Brock, W. A. & C. H. Hommes(1997), “A rational route to randomness”, *Econometrica* 65(5):1059–1095.
- Brock, W. A. & C. H. Hommes(1998), “Heterogeneous beliefs and routes to chaos in a simple asset pricing model”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 22(8):1235–1274.
- Chan, L. K. C., J. Karceski & J. Lakonishok(1999), “On portfolio optimization: Forecasting covariances and choosing the risk model”, *Review of Financial Studies* 12(5):937–974.
- Cheung, W. (2010), “The Black-Litterman model explained”, *Journal of Asset Management* 11(4):229–243.
- Chiarella, C. (1992), “The dynamics of speculative behaviour”, *Annals of Operations Research* 37(1):101–123.
- Chiarella, C. & X. Z. He(2001), “Asset price and wealth dynamics under heterogeneous expectations”, *Quantitative Finance* 1(5):509–526.
- Chiarella, C. & X. Z. He(2003), “Heterogeneous beliefs, risk, and learning in a simple asset-pricing model with a market maker”, *Macroeconomic Dynamics* 7(4):503–536.
- Chiarella, C. & X. Z. He(2008), “An adaptive model of asset price and wealth dynamics in a market with heterogeneous trading strategies”, in: D. Seese et al(eds), *Handbook on Information Technology in Finance*, Springer.
- Chiarella, C., R. Dieci & L. Gardini(2006), “Asset price and wealth dynamics in a financial market with heterogeneous agents”, *Computing in Economics and Finance* 30(9):1755–1786.
- Chiarella, C. et al(2013), “An evolutionary CAPM under heterogeneous beliefs”, *Annals of Finance* 9(2):185–215.
- Dieci, R. & X. Z. He(2018), “Heterogeneous agent models in finance”, in: C. Hommes & B. LeBaron(eds), *Handbook of Computational Economics*, Elsevier.
- Dieci, R. & F. Westerhoff(2013), “On the inherent instability of international financial markets: Natural nonlinear interactions between stock and foreign exchange markets”, *Applied Mathematics and Computation* 221:306–328.
- Dieci, R. & F. Westerhoff(2016), “Heterogeneous expectations, boom-bust housing cycles, and supply conditions: A nonlinear economic dynamics approach”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 71:21–44.
- Ellen, S. & W. F. C. Verschoor(2018), “Heterogeneous beliefs and asset price dynamics: A survey of recent evidence”, in: F. Jawadi(eds), *Uncertainty, Expectations and Asset Price Dynamics: Essays in Honor of Georges Prat*, Springer.
- Fama, E. F. (1970), “Efficient capital markets: A review of theory and empirical work”, *Journal of Finance* 25(2):383–417.
- Fama, E. F. & K. R. French(1996), “Multifactor explanations of asset pricing anomalies”, *Journal of Finance* 51(1):55–84.
- Fama, E. F. & K. R. French(2015), “A five-factor asset pricing model”, *Journal of Financial Economics* 116(1):1–22.
- Gu, S. et al(2020), “Empirical asset pricing via machine learning”, *Review of Financial Studies* 33(5):2223–2273.
- Guerard, J. B. et al(2020), “Earnings forecasting in a global stock selection model and efficient portfolio construction and management”, in: J. B. Guerard & W. T. Ziemba(eds), *Handbook of Applied Investment Research*, World Scientific Publishing.
- Harris, R. D. F. et al(2017), “The dynamic Black-Litterman approach to asset allocation”, *European Journal of Op-*

- erational Research* 259(3):1085–1096.
- He, X. Z. & Y. Li(2008), “Heterogeneity, convergence, and autocorrelations”, *Quantitative Finance* 8(1):59–79.
- He, X. Z. & K. Li(2014), “Time series momentum and market stability”, SSRN Scholarly Paper, No. 2400847.
- He, X. Z. & L. Shi(2012), “Boundedly rational equilibrium and risk premium”, *Accounting & Finance* 52(1):71–93.
- He, X. Z. & H. Zheng(2016), “Trading heterogeneity under information uncertainty”, *Journal of Economic Behavior & Organization* 130:64–80.
- He, X. Z. et al(2018), “Asset allocation with time series momentum and reversal”, *Journal of Economic Dynamics and Control* 91:441–457.
- Hommes, C. H. (2006), “Heterogeneous agent models in economics and finance”, in: L. Tesfatsion & K. L. Judd(eds), *Handbook of Computational Economics*, Elsevier.
- Idzorek, T. (2007), “A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels”, in: S. Satchell(ed), *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets*, Academic Press.
- Jegadeesh, N. & S. Titman(1993), “Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency”, *Journal of Finance* 48(1):65–91.
- Karel J. & M. Kabrhel(2007). “Matching algorithms of international exchanges”, Semantic Scholar Working Paper, No. 13969809.
- Kirman, A. (1993), “Ants, rationality, and recruitment”, *Quarterly Journal of Economics* 108(1):137–156.
- Kogan, L. et al(2017), “Market selection”, *Journal of Economic Theory* 168:209–236.
- Lebaron, B. (2006), *Agent-Based Financial Markets: Matching Stylized Facts with Style*, Cambridge University Press.
- Leippold, M. et al(2021), “Machine learning in the Chinese stock market”, *Journal of Financial Economics* 145(2):64–82.
- Lewellen, J. & S. Nagel(2006), “The conditional CAPM does not explain asset-pricing anomalies”, *Journal of Financial Economics* 82(2):289–314.
- Lin, W. H. , H. W. Teng & C. C. Yang(2019), “A heteroskedastic Black-Litterman portfolio optimization model with views derived from a predictive regression”, in: C. F. Lee & J. C. Lee (eds), *Handbook of Financial Econometrics, Mathematics, Statistics, and Machine Learning*, World Scientific Publishing.
- Lintner, J. (1965), “Security prices, risk, and maximal gains from diversification”, *Journal of Finance* 20(4):587–615.
- Lintner, J. (1975), “The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets”, in: W. T. Ziemba & R. G. Vickson(eds), *Stochastic Optimization Models in Finance*, Academic Press.
- Liu, Q. et al(2016), “Predicting the next location: A recurrent model with spatial and temporal contexts”, *Proceedings of Thirtieth AAAI Conference on Artificial Intelligence* 30(1), <https://doi.org/10.1609/aaai.v30i1.9971>.
- Lux, T. & R. C. J. Zwinkels(2018), “Empirical validation of agent-based models”, in: C. Hommes & B. LeBaron (eds), *Handbook of Computational Economics*, Elsevier.
- MacKinlay, A. C. (1995), “Multifactor models do not explain deviations from the CAPM”, *Journal of Financial Economics* 38(1):3–28.
- Maiti, M. (2020), “A critical review on evolution of risk factors and factor models”, *Journal of Economic Surveys* 34(1):175–184.
- Markowitz, H. M. et al(2021), “Financial anomalies in portfolio construction and management”, *Journal of Portfolio Management* 47(6):51–64.
- Markowitz, H. M. (1999), “The early history of portfolio theory: 1600–1960”, *Financial Analysts Journal* 55(4):5–16.
- Marquering, W. & M. Verbeek(2004), “The economic value of predicting stock index returns and volatility”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 39(2):407–429.
- Merton, R. C. (1980), “On estimating the expected return on the market: An exploratory investigation”, *Journal of Financial Economics* 8(4):323–361.
- Min, L. et al(2021), “A Black-Litterman portfolio selection model with investor opinions generating from machine learning algorithms”, *Engineering Letters* 29(2):710–721.
- Mossin, J. (1966), “Equilibrium in a capital asset market”, *Econometrica* 34(4):768–783.
- Nelson, D. B. (1992), “Filtering and forecasting with misspecified ARCH Models I: Getting the right variance with

- the wrong model”, *Journal of Econometrics* 52(1):61—90.
- Ross, S. A. (2012), “The arbitrage theory of capital asset pricing”, in: L. C. MacLean & W. T. Ziemba(eds), *Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making*, World Scientific Publishing.
- Sharpe, W. F. (1964), “Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk”, *Journal of Finance* 19(3):425—442.
- Siegel, J. J. & R. H. Thaler(1997), “Anomalies: The equity premium puzzle”, *Journal of Economic Perspectives* 11(1):191—200.
- Uddin, A. & D. Yu(2020), “Latent factor model for asset pricing”, *Journal of Behavioral and Experimental Finance* 27, <https://doi.org/10.1016/j.jbef.2020.100353>.
- Wu, J. et al(2022), “Price graphs: Utilizing the structural information of financial time series for stock prediction”, *Information Sciences* 588:405—424.
- Yan, H. (2008), “Natural selection in financial markets: Does it work?”, *Management Science* 54(11):1935—1950.
- Zhang, X. et al(2020), “Evaluating the effect of city lock-down on controlling COVID—19 propagation through deep learning and network science models”, *Cities* 107, <https://doi.org/10.1016/j.cities.2020.102869>.
- Zhao, Z. & X. Zhang(2022), “A continuous heterogeneous-agent model for the co-evolution of asset price and wealth distribution in financial market”, *Chaos, Solitons & Fractals* 155, <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2021.111543>.

On a Continuous Heterogeneous Agent Model for Multi-asset Pricing and Portfolio Construction

ZHAO Zhijun^{1,2} LIU Meixin² ZHANG Xiaoqi^{2,3}

(1. University of Chinese Academy of Social Sciences, Beijing, China;

2. Chinese Academy of Social Sciences, Beijing, China;

3. Southeast University, Nanjing, China)

Abstract: The classical capital asset pricing model (CAPM) and the associated portfolio selection models are built upon the assumptions of homogeneity and complete rationality of individual investors, as well as free liquidity and free arbitrage in market equilibrium. These assumptions differ significantly from the reality, making it hardly to generate accurate forecast for the yield of risky assets from the classical asset pricing models. As a complement to the classical theory, this study proposes a novel asset pricing and portfolio selection model that is derived naturally from a heterogeneous agent model (HAM) with the continuum of bounded-rational investors, liquidity constraint and the non-equilibrium price adjustment. Through deriving the price evolution equation, we find a four-fold decomposition of the temporal price variation for the risky assets, which consists of the variation arising from the bounded-rationality-incurred deviation between the market averaged yield rate and the yield rate implied by CAPM, the deviation between the market structure induced by the heterogeneity of investors and the homogeneous market structure, the mismatch between the demand and supply on individual risky assets, and the mismatch of the total demand and supply of risky assets incurred by the wealth effect. Combining the evolution equation for the yield rate of risky assets together with the real data of stock prices, we present an adaptive approach to forecast the stock yield rate and implement portfolio optimization. By applying both our adaptive approach and the classical CAPM-based approaches to the stocks in the China’s A-share market, we make a numerical analysis to compare the relative performance of different approaches in terms of both the forecast accuracy and profitability of the optimized portfolio. The results demonstrate that our adaptive approach outperforms the alternatives in a series of evaluation criteria, which proves the potential of the proposed HAM in the fields of asset pricing and portfolio construction.

Keywords: Portfolio; Asset Pricing; Heterogeneous Agents Model

(责任编辑:陈建青)

(校对:何伟)